

Presidency College, Kolkata
Admission Test for First Year B. Sc. Class - 2007
Mathematics (Honours)

Total Marks: 100

Time: Two Hours

Departmental Serial Number should be written only in the proper place, not anywhere else in the question-cum-answer book.

(Attempt all questions. Non-programmable calculators may be used if required. No extra sheet of paper or graph paper will be supplied. The sheet supplied for rough work is not to be submitted.)

Group A

Each question below is followed by four possible answers of which exactly one is correct. Put a tick (\checkmark) on the correct answer (either (a) or (b) or (c) or (d)) Each correct answer would be awarded 3 marks, 1 mark would be awarded for no attempt, a wrong answer would fetch no credit.
প্রতিটি প্রশ্নের প্রদত্ত উত্তর দেওয়া আছে তন্মধ্যে কেবলমাত্র একটি উত্তর সঠিক, সেটিতে টিক (\checkmark) চিহ্ন দাও। সঠিক উত্তরের জন্য 3 নম্বর ও উত্তর না দেওয়ার জন্য 1 নম্বর দেওয়া হবে, ভুল উত্তরের জন্য কোন নম্বর দেওয়া হবে না।

1. Let the logarithm of x^m to the base y^k be equal to the logarithm of y^n to the base x^p , then what is the value of each logarithm?

যদি y^k ভিত্তিতে x^m -এর লগ x^p ভিত্তিতে y^n -এর লগ এর সমান হয়, তবে প্রত্যেক লগারিথম এর মান কত?

- [a] $\pm \frac{1}{2}$ [b] ± 2 [c] $\pm \frac{m}{n}$ [d] $\pm \frac{n}{m}$

2. The equation $px^2 + qx + r = 0$ has two non-zero roots α and β . Find the value of $(p\alpha + \frac{r}{\alpha})^2 (p\beta + \frac{r}{\beta})^2$.

$px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের দুটি অশূন্য মূল α এবং β হলে $(p\alpha + \frac{r}{\alpha})^2 (p\beta + \frac{r}{\beta})^2$ এর মান নির্ণয় কর।

- [a] q^2 [b] $-q^2$ [c] $(\frac{r}{p})^2$ [d] $-(\frac{r}{p})^2$

3. What is the term that does not contain x in the expansion of $(x - \frac{1}{x})^4 (x + \frac{1}{x})^2$?

$(x - \frac{1}{x})^4 (x + \frac{1}{x})^2$ -এর বিকৃতির x -বহিত পদটি কী?

- [a] 1 [b] 3 [c] -3 [d] 0

4. What is the sum of the series $\sum_{i=0}^n i(i-1)^n C_i p^i q^{n-i}$, where $0 \leq p \leq 1, p+q=1$?

$\sum_{i=0}^n i(i-1)^n C_i p^i q^{n-i}$ সেরিটের যোগফল কত, যেখানে $0 \leq p \leq 1, p+q=1$?

- [a] np [b] $np(1-p)$ [c] $p^2n(n-1)$ [d] $p^2n(n+1)$

5. Which of the following is the product AB of the matrices $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ and $B = [b_1]$?

যদি $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ এবং $B = [b_1]$ দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, নিচের কোনটি AB গুণফল?

- [a] $b_1 A$ [b] $[a_1 b_1 \ a_2 b_1 \ a_3 b_1]$ [c] $[a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1]$ [d] none of (a), (b) and (c)

6. What is the value of $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$?

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ এর মান কত?

- [a] $\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & 2b_1 \\ a_2 + a_4 & 2b_2 \end{vmatrix}$ [b] $\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & b_1 + a_4 \\ a_2 + b_1 & 2b_2 \end{vmatrix}$ [c] $\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & a_2 + a_4 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ [d] none of these

7. Find the least positive integral value of n for which $(\frac{1+i}{1-i})^n = 1$.

সর্বকম্ব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n নির্ণয় কর যার জন্য $(\frac{1+i}{1-i})^n = 1$ হয়।

- [a] 12 [b] 8 [c] 4 [d] 6

8. If the equation $\sin^{-1} x + \sin^{-1}(1 - mx) = \cos^{-1} x$ has a non-zero solution for x then in which of the following regions m necessarily lies?

$\sin^{-1} x + \sin^{-1}(1 - mx) = \cos^{-1} x$ সমীকরণের অশূন্য x -এর জন্য সমাধান থাকলে m নিচের কোন অঞ্চলে বাস্তব আবশ্যিক?

- [a] $-1 \leq m \leq 1, m \neq 0$ [b] $0 < m$ [c] $-2 \leq m \leq 2, m \neq 0$ [d] $m < 0$

9. Let $\sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ and $\sin B = \frac{1}{2}$, then what is the nature of the triangle ABC ?

যদি $\sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ এবং $\sin B = \frac{1}{2}$ হয়, ABC ত্রিভুজের প্রকৃতি কী?

- [a] equilateral triangle (সমবাহু ত্রিভুজ) [b] acute-angled triangle (সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ)
[c] obtuse-angled triangle (সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ) [d] isosceles triangle (সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ)

10. If $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0$, then which one of the following is true?

যদি $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ যখন $x \neq 0$ এবং $f(0) = 0$ হয়, নিচের কোনটি সঠিক?

- [a] $f'(0) = 0$ and $f''(0) = 0$ [b] $f'(0) = 0$ and $f''(0) = 1$ [c] $f'(0) = 0$ and $f''(0)$ does not exist [d] both $f'(0)$ and $f''(0)$ do not exist

11. Which is the incentre of the triangle with vertices at $(1, \sqrt{3})$, $(0, 0)$ and $(2, 0)$?

$(1, \sqrt{3})$, $(0, 0)$ এবং $(2, 0)$ শীর্ষবিন্দু সমন্বিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র কোনটি?

- [a] $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ [b] $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ [c] $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ [d] $(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

12. Which is the least distance of the point (α, β) from the circle $ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $(a \neq 0)$?

(α, β) বিন্দু থেকে $ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $(a \neq 0)$ বৃত্তের ন্যূনতম দূরত্ব কত?

- [a] $\frac{1}{a} |\sqrt{g^2 + f^2 - ca}|$ [b] $\sqrt{(\alpha + \frac{g}{a})^2 + (\beta + \frac{f}{a})^2}$
[c] $\frac{1}{a} \left[\sqrt{a^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2a(\alpha g + \beta f) + g^2 + f^2 - \sqrt{g^2 + f^2 - ca}} \right]$ [d] 0

13. Which is the locus of the middle points of chords of parabola $y^2 = 4px$ passing through the vertex?

$y^2 = 4px$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জায় এর মধ্যবিন্দুর সম্মেলনস্থল কোনটি?

- [a] $y^2 = -3px$ [b] $y^2 = 2px$ [c] $x^2 = 4py$ [d] $x^2 = 2py$

14. p, q, r, s are any four real numbers. For which one of the following, $p^2q|r|s \geq 0$?

p, q, r, s যারকি বাস্তব সংখ্যা, নিচের কোন মানগুলির জন্য $p^2q|r|s \geq 0$ হবে?

- [a] $|q| = q$ and $|s| = s$ [b] $|q| = q$ and $|s| = -s$ [c] $|q| = -q$ and $|s| = s$ [d] $|q| = |p|$ and $|s| = -s$

15. Let H denote the set of all human beings at any particular point of time. Define three binary relations ρ, ρ_1, ρ_2 in H as follows: $x\rho y$ iff x is a brother of y , $x\rho_1 y$ iff x and y are siblings (brother or sister of each other), $x\rho_2 y$ iff x and y are both of the same parents. Then which one of the following is true?

কোন এক সময়ে সমস্ত মানুষের সেট H ধরা চিহ্নিত। ρ, ρ_1 এবং ρ_2 তিনটি সম্পর্ক নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হ'ল: $x\rho y$ যদি x এবং y একে শুরুরমাতা যদি x, y এর জায় হয়, $x\rho_1 y$ যদি x এবং y একে শুরুরমাতা যদি x ও y এর শরৎপিতার সন্তানের হয়, $x\rho_2 y$ যদি x এবং y একে শুরুরমাতা যদি x ও y উভয়ের একই পিতামাতার হয়। অতঃলে নিচের কোনটি সত্য?

- [a] $\rho_1 = \rho_2$ and $\rho \subseteq \rho_1$ [b] $x\rho y$ and $y\rho z \Rightarrow x\rho z, \forall x, y, z \in H$
[c] $x\rho_1 y$ and $y\rho_1 z \Rightarrow x\rho_1 z, \forall x, y, z \in H$ [d] none of (a), (b) and (c) is valid

16. Let f and g be defined on a suitable part of \mathbb{R} be given by $f: x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $g: x \mapsto \sin \frac{1}{2x}$. Then which of the following is true?

\mathbb{R} -এর উপযুক্ত অংশে f এবং g নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হ'ল: $f: x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $g: x \mapsto \sin \frac{1}{2x}$; অতঃলে নিচের কোনটি সত্য?

- [a] f and g are defined for all real x (f ও g সকল বাস্তব x এর জন্য সংজ্ঞায়িত)
[b] f and g have the same range (f ও g এর বিস্তার একই)
[c] $f(x) > g(x), \forall x$
[d] $f(x) < g(x), \forall x$

17. Consider the mappings $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 2|x|, \forall x \in \mathbb{R}$ and $g(x) = x + |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Then what is the definition of $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$?

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ও $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এর সঙ্গে যথাক্রমে $f(x) = 2|x|, \forall x \in \mathbb{R}$ এবং $g(x) = x + |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ । $g \circ f$ এর সঙ্গে কোনটি?

- [a] $g \circ f(x) = 2(x + |x|)^2$ [b] $(g \circ f)(x) = 4x|x|$
[c] $(g \circ f)(x) = 2|x|(x + |x|)$ [d] $(g \circ f)(x) = 4|x|^2$

18. Let a function f is differentiable on entire real line such that f' is constant and $f(mx) = mf(x)$ for all values of m and x . What is the value of $f(x+y)$?

f এমন একটি অপেক্ষক যে তা সমস্ত বাস্তব সংখ্যার জন্য সমকলয়যোগ্য, f' ধ্রুবক এবং প্রতিটি বাস্তব m ও x এর জন্য $f(mx) = mf(x)$; অতঃলে $f(x+y)$ এর মান কত?

- [a] $xf(y) + yf(x)$ [b] $f(x) + f(y)$ [c] $x+y$ [d] $xf(x) + yf(y)$

19. Which of the following is the value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$? নিচের কোনটি $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ এর মান?

- [a] 0 [b] e [c] 1 [d] e^{-1}

20. What is the area included between x -axis, $y = mx$ and the ordinates $x = -1$ and $x = 1$?

x -অক্ষ, $y = mx$ এবং $x = -1$ ও $x = 1$ কোটির মধ্যে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

- [a] 0 [b] $|m|$ [c] $\frac{1}{2}|m|$ [d] none of these

Group B

Answer all the questions. Answer must be written in blank space just below each question.

The additional sheet may be used for rough work.

Each question carries 5 marks

21. A determinant of second order is made with the elements 0 and 1. What is the probability that the determinant made is non-negative ?

0 এবং 1 পদবিশিষ্ট দুই ক্রমের একটি নির্ণায়ক তৈরী করা হ'ল। নির্ণায়কটির মান ঋণাত্মক না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

22. Let A, B, C, D be four vertices of a quadrilateral in order. The co-ordinates of A, B, C, D are respectively $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$ and $(-1, -1)$. Show that the diagonals of the quadrilateral are at right angles although it is neither a rhombus nor a square. Shade the region enclosed by the quadrilateral and find out its area.

একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু চারিটি A, B, C, D এই ক্রমে অবস্থিত। A, B, C, D -এর স্থানকে যথাক্রমে $(1, 0), (0, 0), (0, 1)$ এবং $(-1, -1)$ দেখাও যে চতুর্ভুজটির কর্ণদুটি সমকোণে ছেদ করলেও এটি রম্বসও নয় বর্গক্ষেত্রও নয়। চতুর্ভুজটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলটি চিহ্নিত কর এবং এর ক্ষেত্রফল বাহির কর।

23. Show separately with the help of sketches on plain paper the sets A and B in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (where \mathbb{R} denotes the real line). $A = \{(-3t^2, -6t) : t \geq 0\}$, $B = \{(3t^2, 6t) : t \leq 0\}$.

পৃথকভাবে অক্ষরের সাহায্যে $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ এর মধ্যে অবস্থিত $A = \{(-3t^2, -6t) : t \geq 0\}$ এবং $B = \{(3t^2, 6t) : t \leq 0\}$ সেটগুলি দেখান, যেখানে \mathbb{R} সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট সূচিত করে।

24. OA, OB, OC are three straight lines, where OA, OC are in right angles and OB bisects $\angle AOC$. There is a source of light at C and P is a moving point on OB whose shadow on OA is Q . Given that $OC = 24$ cm., P moves with uniform velocity 4 cm./sec. Find the velocity of Q when $OP = 8\sqrt{2}$ cm.

OA, OB, OC তিনটি সরাসরেখা, OA, OC সমকোণে অবস্থিত এবং $\angle AOC$ কে OB সমবিভক্ত করে। C বিন্দুতে আলোর একটি উৎস আছে এবং P বিন্দুটি OB -এর উপর গতিশীল, OA -এর উপর যার ছায়া Q । দেওয়া আছে $OC = 24$ সেমি এবং P ৪সেমি/সেকেন্ড বেগে গতিশীল। Q -এর বেগের বস যখন $OP = 8\sqrt{2}$ ।

25. Prove by induction that $n(n^2 + 20)$ is divisible by 48 if n is an even positive integer.

আমরাহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $n(n^2 + 20)$ 48 দ্বারা বিভাজ্য, যেখানে n একটি ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা।

ii

26. Each pair of the three non-null vectors $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ is non-collinear. The vectors $\vec{p} + \vec{q}$ and \vec{r} are collinear. Also the vectors $\vec{q} + \vec{r}$ and \vec{p} are collinear. Show that $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$.

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ এই তিনটি ভেক্টরের কোন জোড়াই সমরেখ নয়। $\vec{p} + \vec{q}$ এবং \vec{r} সমরেখ, আবার $\vec{q} + \vec{r}$ এবং \vec{p} সমরেখ। দেখাও যে $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$ ।

27. Prove that (সমাধন কর) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}, (a, b > 0)$.

28. Solve (সমাধন কর) : $\sin\left(x + y - \frac{\pi}{3}\right) \frac{dy}{dx} = \sin\left(x + y + \frac{\pi}{3}\right)$, given that (সেটা আছে) $y = \frac{\pi}{2}$ when $x = 0$